

Dr inż. Dorota Nowak-Woźny

5. Rezonans napięć i prądów

Cel ćwiczenia:

- Wyznaczenie krzywej rezonansowej dla szeregowego i równoległego obwodu RLC.

Zagadnienia:

- Fizyczne podstawy zjawiska rezonansu.
- Możliwości zastosowania zjawisk rezonansu w nauce i technice.
- Różne aspekty wykorzystania zjawiska rezonansu w energetyce (kompensacja mocy biernej, rezonatory).
- Metodologia badania zjawiska rezonansu.
- Badanie zjawiska przepięcia i przetężenia podczas występowania rezonansu napięć i prądów.

Uwaga! Przed przystąpieniem do ćwiczenia zapoznać się z dodatkiem pt. "Procedura wyznaczania niepewności pomiarowych".

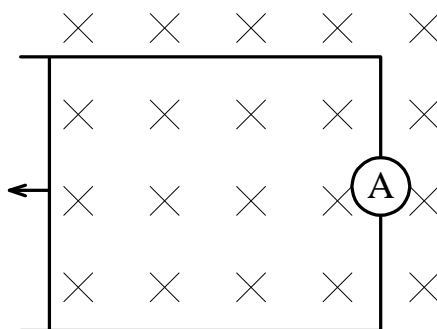
Wprowadzenie:

Zjawisko rezonansu elektrycznego jest zjawiskiem bardzo istotnym i jest wykorzystywane w wielu dziedzinach elektrotechniki i energetyki. Między innymi we wszelkiego rodzaju szeroko rozumianych odbiornikach radiowych do np. dostrajania odbiorników do częstotliwości nośnej. W energetyce zjawisko rezonansu wykorzystuje się do kompensacji mocy biernej.

We współczesnej elektrotechnice bardzo istotne znaczenie ma zjawisko indukcji elektromagnetycznej zwane (od nazwiska jego odkrywcy) zjawiskiem *Faraday'a*. Polega ono na indukowaniu siły elektromotorycznej w obwodzie zamkniętym pod wpływem ruchu tego obwodu w polu magnetycznym.

Weźmy obwód jak pokazany na rys. 5.1.

Wtedy



Rys. 5.1. Ilustracja zjawiska *Faraday'a*.

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Indukowana SEM jest proporcjonalna do szybkości zmiany strumienia magnetycznego w danym obwodzie. Znak minus związany jest z regułą *Lenza*, która mówi, że kierunek prądu indukowanego jest taki, że pole magnetyczne prądów wywołane przeciwstawia się zmianę zewnętrznego strumienia magnetycznego.

W przypadku cewki:

$$\Phi = L \cdot i ,$$

współczynnik proporcjonalności L zwany jest indukcyjnością cewki. Jego jednostką jest henr H

$$H = \frac{V}{\frac{A}{s}} .$$

Dla cewki siła elektromotoryczna indukcji wyraża się zależnością

$$E_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt} .$$

Prąd przemienny charakteryzuje się okresowo zmieniającymi się w czasie wartościami natężenia i kierunku prądu. Weźmy przypadek prądu sinusoidalnie zmiennego. Wtedy natężenie i napięcie prądu opisuje się zależnościami:

$$u = U_0 \sin \omega t$$

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi) ,$$

gdzie φ jest przesunięcie fazowym między natężeniem i napięciem (faza początkowa).

Rezonans szeregowy RLC

W obwodach elektrycznych RLC następują kolejne przemiany energii pola elektrycznego w energię pola magnetycznego i odwrotnie.

W obwodach elektrycznych można wywołać drgania wymuszone. Weźmy obwód szeregowy złożony z rezystora o oporze R , cewki indukcyjnej o indukcyjności L , kondensatora o pojemności C oraz źródła sinusoidalnie zmiennego napięcia

$$E = E_0 \cdot \sin \omega t .$$

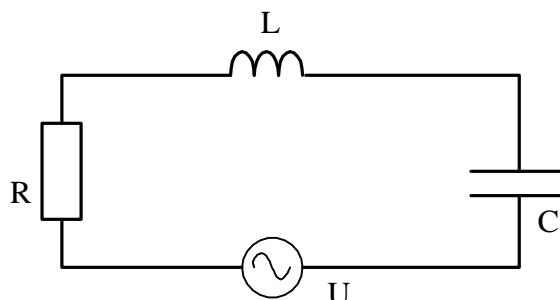
Na podstawie II prawa *Kirchhoffa* – suma czynnych w obwodzie sił elektromotorycznych E , E_L równa się sumie spadków napięcia u_R , u_C – można ułożyć równanie:

$$u_R + u_C = U + E_L$$

Korzystając z następujących praw i zależności:

- prawa *Ohma* opisującego spadek napięcia na rezystorze: $u_R = i \cdot R$,
- prawa indukcji elektromagnetycznej *Faraday'a* opisującego zależność siły elektromotorycznej indukcji własnej E_{ind} [V] od zmiany strumienia magnetycznego w danym obwodzie Φ [Wb]

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$



Rys. 5.2. Szeregowy obwód RLC.

W szczególności dla cewki siła elektromotoryczna zależy od natężenia prądu i [A] i indukcyjności własnej obwodu zwanej także współczynnikiem indukcji własnej lub samoindukcji

$$[L] = H = \frac{1V}{1A/s} = 1\Omega \cdot s$$

$$E_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}.$$

- zależności pomiędzy pojemnością kondensatora a ładunkiem zgromadzonym na jego okładkach $C = \frac{Q}{u_c}$. Ponieważ $i = \frac{dQ}{dt}$, stąd $u_c = \frac{Q}{C} = \frac{\int i \cdot dt}{C}$.

Otrzymujemy równanie:

$$R \cdot i + \frac{\int i dt}{C} = U_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt}.$$

Po zrózniczkowaniu otrzymujemy:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = U_0 \omega \cos \omega t - L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

lub

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = U_0 \omega \cos \omega t.$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy:

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{gdzie } \varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R},$$

i

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z}. \quad (*)$$

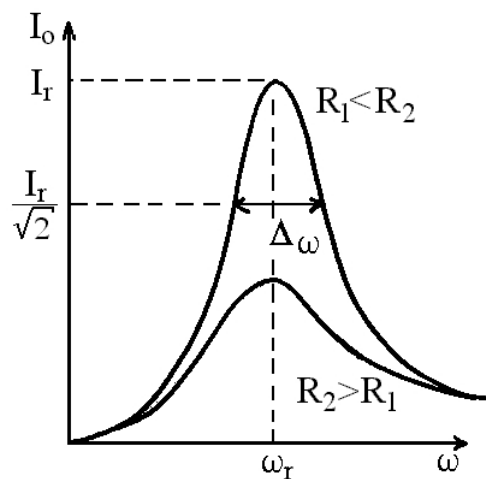
Oznacza to, że po pewnym czasie od chwili podłączenia do obwodu RLC wymuszającej siły elektromotorycznej U ustalony prąd wymuszony w obwodzie:

- ma przebieg sinusoidalny o częstotliwości ω równej częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej U ,
- wykazuje przesunięcie fazowe względem U ,
- ma amplitudę zależną od amplitudy i częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej, od rezystancji, pojemności i indukcyjności elementów obwodu RLC (równanie*).

Dla stałych wartości parametrów obwodu RLC, amplituda prądu I_0 w funkcji częstotliwości ω wymuszającej siły elektromotorycznej U przedstawia się następująco:

Na zaprezentowanych krzywych można zauważyć pewne prawidłowości:

- przy pewnej częstotliwości zwanej częstotliwością rezonansową obserwuje się maksima krzywych,
- maksima (wartość) te zależą jedynie od rezystancji R ,



Rys. 5.3. Zależność amplitudy prądu wymuszonego w obwodzie RLC od częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej.

- częstotliwość rezonansowa zależy od indukcyjności L i pojemności C .

Powróćmy do równania (*). Zastanówmy się kiedy wystąpi maksimum krzywej $I_0 = f(U_0, R, L, C, \omega)$? Otóż maksimum to występuje gdy mianownik równania (*) przyjmie wartość minimalną czyli, gdy:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{warunek rezonansu w obwodzie RLC}$$

stąd

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

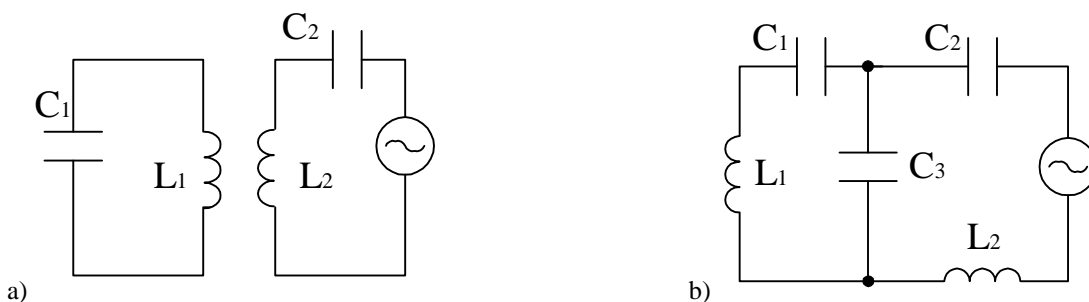
Biorąc to pod uwagę, w rezonansie:

$$I_0^{\text{rez}} = \frac{U_0}{R}.$$

Rezonans polega więc na gwałtownym wzroście amplitudy natężenia prądu w obwodzie przy zbliżaniu się częstości do częstości rezonansowej – rezonans napięć.

Rezonans elektromagnetyczny może wystąpić podczas oddziaływania na siebie dwóch obwodów RLC (sprzężenie indukcyjne lub pojemnościowe). Warunek rezonansu w tym przypadku prowadzi do zależności:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$



Rys. 5.4. Sprzężenie indukcyjne (a) i pojemnościowe (b) dwóch obwodów RLC.

Rezonans szeregowy – rezonans napięć bo przy częstości rezonansowej amplitudy napięć na cewce i kondensatorze są równe $U_R = U_C$ podczas gdy fazy ich są przeciwne.

Straty energii w obwodzie RLC opisuje się za pomocą współczynnika dobroci Q :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

E – energia naładowanego kondensatora i pola magnetycznego cewki,

ΔE – energia rozproszona na oporniku R w ciągu jednego okresu w postaci ciepła.

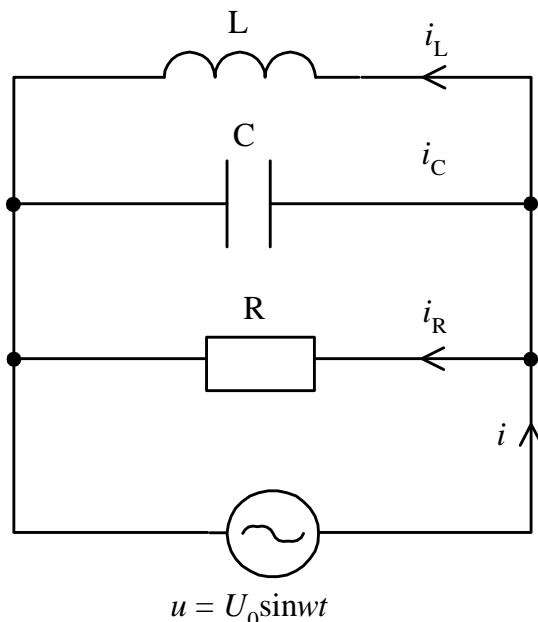
Stąd

$$Q = \frac{\omega_{\text{rez}} L}{R} = \frac{1}{\omega_{\text{rez}} CR} = \frac{\omega_{\text{rez}}}{\Delta\omega}$$

gdzie $\Delta\omega$ – szerokość krzywej rezonansowej dla $I = \frac{I_{rez}}{\sqrt{2}}$.

Rezonans równoległy RLC.

Weźmy obwód pokazany na rysunku.



Rys. 5.5. Równoległy obwód RLC.

W przypadku obwodu przedstawionego na rys 5.5 korzystamy z I prawa *Kirchhoffa*.

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Następnie rozwiązujemy odpowiednie równanie różniczkowe.

Analizę tego obwodu można także przeprowadzić wykorzystując prawo *Ohma* dla prądu zmiennego oraz zapis prądu w postaci liczb zespolonych:

$$i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$u = U_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C} + \frac{1}{R}$$

$$i = \frac{u}{Z}.$$

Otrzymujemy, że amplituda prądu płynącego przez taki obwód I_0 wyraża się zależnością:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

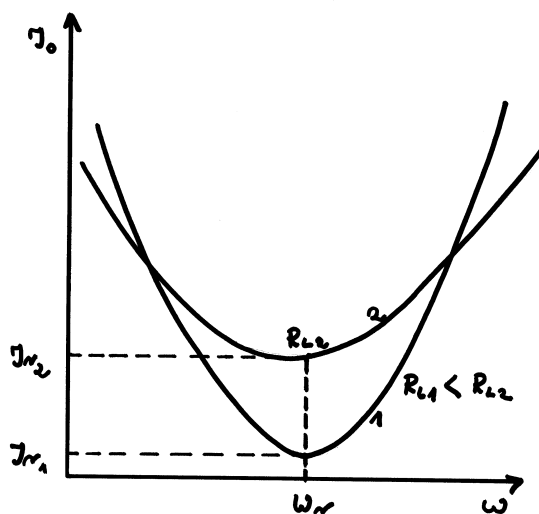
$$\varphi = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}.$$

Przy rezonansie równoległym, inaczej zwanym rezonansem prądów, amplituda prądów osiąga wartość minimalną:

$$I_0^{\min} = \frac{U_0}{R}$$

dla

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



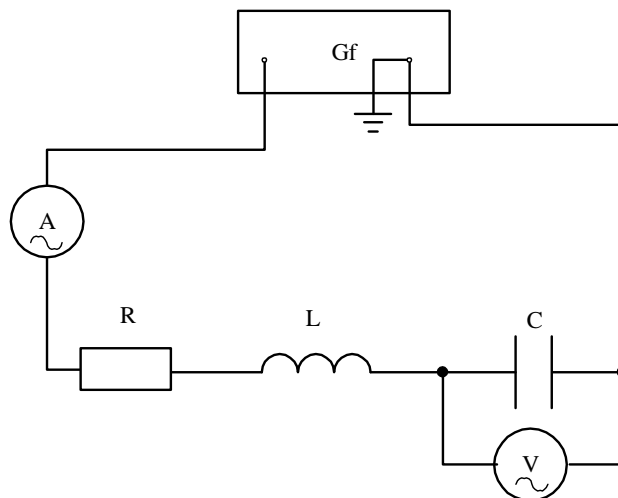
Rys. 5.6. Zależność amplitudy prądu od częstotliwości dla obwodu równoległego.

Przebieg ćwiczenia:

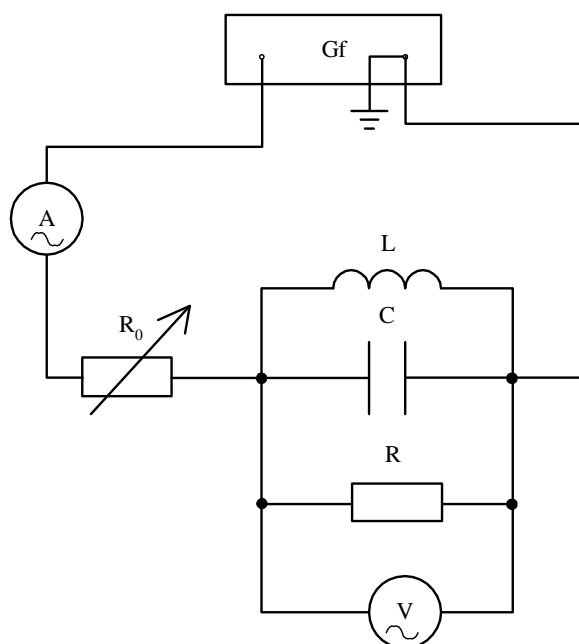
Układ pomiarowy zbudowany jest z:

- generatora funkcyjnego będącego źródłem sygnału sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości – GF,
- elementów R , L i C połączonych w sposób szeregowy i równoległy,
- miliamperomierza – A,
- woltomierza – V,

- oscyloskopu dwukanałowego służącego do obserwacji przebiegu napięcia i natężenia prądu oraz krzywych *Lissajous* – OII.



Rys. 5.7. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia rezonansu szeregowego.

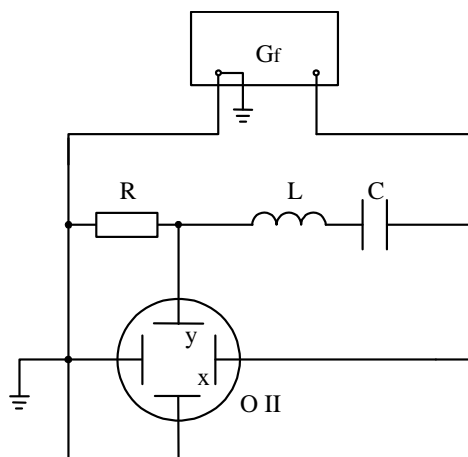


Rys. 5.8. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia rezonansu równoległego.

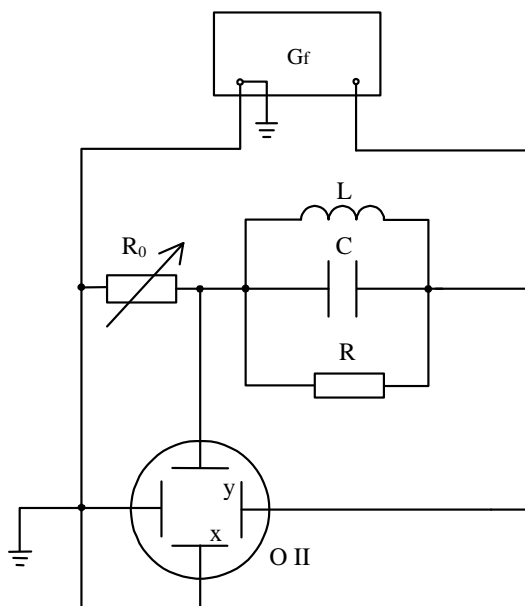
Zadania:

1. Zmontować układ pomiarowy do wyznaczenia rezonansu szeregowego.
2. Zmieniając częstotliwość sygnału wejściowego f (wartość napięcia zasilającego pozostaje stała) mierzyć wartość natężenia prądu oraz spadku napięcia na kondensatorze.
3. Narysować przebieg krzywej rezonansowej.
4. Wyznaczyć graficznie częstotliwość rezonansową.
5. Obliczyć współczynnik dobroci obwodu.
6. Podłączyć układ do oscyloskopu zgodnie ze schematem.
7. Wyznaczyć zależność przesunięcia fazowego φ od częstotliwości.

8. Powtórzyć procedurę pomiarową dla rezonansu równoległego.
9. Wyniki pomiarowe przedstawić w tabelach.
10. Przeprowadzić analizę niepewności.
11. Rysunki sporządzić na papierze milimetrowym z naniesieniem niepewności pomiarowych.
12. Opracować wnioski kładąc główny nacisk na istotę zjawiska rezonansu oraz na dyskusję niepewności pomiarowych.



Rys. 5.9. Podłączenie obwodu szeregowego do oscyloskopu.



Rys. 5.10. Podłączenie obwodu równoległego do oscyloskopu.

Literatura:

- Piekara A.H., *Elektryczność i magnetyzm*, rozdz. IV, PWN, Warszawa 1970.
 Jaworski B., Dietłaf A., Miłkowska L., *Kurs fizyki*, t.II, PWN, Warszawa 1971.
Poradnik Inżyniera Elektryka, praca zbiorowa, WNT, Warszawa 1997.